# אלגברה 1 מח'

## פרק 4 - שדות

### תוכן העניינים

1. שדות ........ 1
2. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות ........ 4

# שדות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על $R$.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x\oplus y=x+y+4$
$x\otimes y=2xy$

ב. $x\oplus y=x+y$
$x\otimes y=2xy$

ג. $x\oplus y=y$
$x\otimes y=y^2$

**2)** נתונה הקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\right\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ״ל, מהווה שדה.

**3)** נתונה הקבוצה $C=\left\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ \ ,\ \ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכיחו שהקבוצה $C$, עם פעולות החיבור והכפל הנ״ל, מהווה שדה.
באיזה שדה מפורסם מדובר?

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

**5)** יהיו $a,b$ איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.

ב. הוכיחו כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכיחו כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

**6)** יהיו $a$ ו- $b$ איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

**7)** הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $a=c \Rightarrow ab=cb$, לכל $a,b,c$, בשדה $(b\neq 0)$.

**8)** הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה $0\neq a,b,c$,
קיים בשדה איבר יחיד $x$, כך ש- $ax+b=c$.

**9)** נתון $F$ שדה, ויהיו $x,y\in F$, כך ש- $xy\neq 0,1$.
הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x-xyx)^{-1}=x^{-1}+(y^{-1}-x)^{-1}$,
וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

**10)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על $R^2$.

א. $$\begin{gathered}(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\\(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)\end{gathered}$$

ב. $$\begin{gathered}(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\\(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)\end{gathered}$$

האם $\left(R^2,+,\cdot\right)$ שדה?

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A=\{f:R\to R \mid \forall x,\ f(x)\neq 0\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ , $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
האם הקבוצה $A$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B=\{f:R\to R\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.
האם הקבוצה $B$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

**12)** יהי $F$ שדה בעל מספר **סופי** של איברים.
הראו שלכל איבר $a \neq 0$ ב- $F$, קיים $k$ טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$.

**13)** נתון השדה $Z_7$.
א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.
ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.
ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

**14)** נתונה הקבוצה $Z_p = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{p-1}\right\}$, $p$ מספר ראשוני.
כאשר $\overline{a} = \left\{x \in Z \mid a \equiv x (\text{mod } p)\right\}$, ו- $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a \equiv b (\text{mod } p)$.
לכל $\overline{a}, \overline{b}$ בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:
$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}, \ \ \overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$
הוכיחו ש- $(Z_p, \oplus, \otimes)$ מהווה שדה.
בקיצור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו $p$, כאשר $p$ ראשוני, מהווה שדה.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** שאלת הוכחה.
**3)** שאלת הוכחה.
**4)** שאלת הוכחה.
**5)** שאלת הוכחה.
**6)** שאלת הוכחה.
**7)** שאלת הוכחה.
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
**11)** בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
**12)** שאלת הוכחה.
**13)** א. שאלת הוכחה.
ב. האיבר הנגדי לאיבר $\overline{3}$ הוא $\overline{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{2}$.
ג. האיבר ההופכי לאיבר $\overline{4}$ הוא $\overline{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{3}$.
**14)** שאלת הוכחה.

# חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \dfrac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 \, , \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ( $k$ ו- $n$ טבעיים).

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל $x$.

ג. לכל מספר טבעי $n$, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר $x$, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

**4)** הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:
א. $A=\{11,13,17,19\}$
ב. $B=\{x\,|\,10<x<20,\ \text{מספר ראשוני } x\}$
ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$
ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$
ה. $E=\{x\,|\,x=2m,\ \text{שלם זוגי } m\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.
מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$
ב. $2\in A$
ג. $\{2\}\in A$
ד. $\{2\}\subseteq A$
ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$
ו. $\phi\in A$
ז. $\phi\subseteq A$
ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$
ט. $\{2,4\}\subseteq A$
י. $\{2,4\}\in A$
יא. $\{\{2,4\}\}\in A$
יב. $\{2,5\}\subseteq A$
יג. $\{2,5\}\in A$
יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצאו שתי קבוצות, $A$ ו- $B$, המקיימות:
א. $A\in B$
ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:
$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ , $E=\{7,8\}$
קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה $X$:
א. $X\subseteq A$ וגם $X\nsubseteq D$.
ב. $X\subseteq D$ וגם $X\nsubseteq C$.
ג. $X\subseteq E$ וגם $X\nsubseteq A$.

9) הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

**10)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

## תשובות סופיות

1) א. לכל $x$ ולכל $y$ מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל $x$ קיים $y$, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה נכונה.

ג. לכל $x$ ולכל $y$ קיים $z$ כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל $x$ חיובי ולכל $y$ חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל $n$ טבעי המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות $A$, $B$ ו- $C$ שוות זו לזו, והקבוצות $D$ ו- $E$ שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

8) א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) שאלת הוכחה.

10) 1) $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, 2) $A\cap B=\{4,6,8\}$, 3) $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

4) $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, 5) $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$